

# **SIMPLIFICACIÓN EN LOS CÁLCULOS DE ESBETEZ LÍMITE EN E.L.U. DE INESTABILIDAD: DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN SEGÚN LA INSTRUCCIÓN EHE-08.**

## **SIMPLIFIED CALCULATIONS OF SLENDERNESS LIMIT IN U.L.S. OF INSTABILITY: INTERACTION DIAGRAMS ACCORDING TO THE INSTRUCTION EHE-08.**

Roberto Serrano-López                      Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Profesor Asociado de Universidad de Burgos. Escuela Politécnica Superior.  
E-mail: robertosl@ubu.es

Agustín Javier Gómez-Sáez                      Ingeniero Industrial  
Profesor Asociado de Universidad de Burgos. Escuela Politécnica Superior.  
E-mail: ajgomez@ubu.es

Vanesa Ortega-López                      Dra. Ingeniera Agrónoma  
Profesora Ayudante de la Universidad de Burgos. Escuela Politécnica Superior.  
E-mail: vortega@ubu.es

Juan Manuel Manso-Villalaín                      Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Profesor Titular de la Universidad de Burgos. Escuela Politécnica Superior.  
E-mail: jmmanso@ubu.es

Contacto: Universidad de Burgos. Departamento de Ingeniería Civil. Escuela Politécnica Superior,  
Calle Villadiego, s/n - 09001 Burgos. Tfno: +34 947 258919 (9078).

### **RESUMEN:**

La introducción de la norma EHE-08 ha llevado consigo varios cambios, tanto conceptuales como paramétricos, en diferentes aspectos de su articulado. Este artículo busca ofrecer una ayuda al proyectista de hormigón, facilitándole los cálculos previos a la comprobación del Estado Límite de Inestabilidad. Se realiza una introducción al significado del límite inferior de esbeltez (incluyendo las propuestas de la ACI-318, el EC-2 y MC-90), para inmediatamente ofrecer una herramienta de aplicación directa que permita su obtención en el caso de la vigente Instrucción de Hormigón Estructural. Por otra parte, se expone también la formulación para comprobar secciones de soportes armados.

**Palabras Clave:** pandeo, esbeltez, norma EHE

### **ABSTRACT:**

Recent EHE-08 code has introduced many changes, both conceptual and parametric, in different aspects of its requirements. This paper seeks to offer support to the concrete designer, enabling pre-test calculations of the instability limit state. Beginning with an introduction to the meaning of the lower limit of slenderness (including ACI-318, EC-2 and MC-90 proposals), to immediately provide an application tool that allows obtaining direct in the case of the current Instruction of Structural Concrete. Moreover, it is also exposed the formulation to test reinforced column sections.

**Key Words:** buckling, slenderness, EHE code

## 1.- INTRODUCCION

Entre los diversos cambios establecidos en el articulado de la Instrucción de Hormigón Estructural (EHE-08), se introducen diferentes novedades en cuanto a las propias características del hormigón (resistencias, diagrama tensión-deformación, coeficiente de cansancio...), la propuesta de nuevos materiales y tecnologías (fibras, áridos ligeros, hormigones autocompactantes), la revisión de los conceptos de durabilidad, o los nuevos criterios de sostenibilidad. Dentro de las variaciones referentes a los Estados Límite Últimos (E.L.U.), se propone una formulación específica que modifica, complicándolo ligeramente, el procedimiento matemático necesario para establecer los rangos de uso de los métodos de cálculo frente a inestabilidad (pandeo).

En la fig. 1 se incluye un resumen de los conceptos más importantes a tener en cuenta en el estudio de los fenómenos de segundo orden, a los cuales se hará constante referencia durante el resto de apartados del artículo.

**CONCEPTOS BÁSICOS EN PANDEO (EHE-08)**

**LONGITUD DE PANDEO ( $l_0$ ):** tiene en cuenta la influencia de las condiciones de sustentación en los extremos de una barra, comparándola de forma relativa a la de una barra biapoyada, mediante la introducción del coeficiente  $\alpha$ . Coincide con la distancia mínima entre puntos de inflexión de la deformada.

$l_0 = \alpha \cdot l$

**ESBELTEZ GEOMÉTRICA ( $\lambda_g$ ):** relaciona la longitud de pandeo con la dimensión de la sección en la dirección de cálculo.

**ESBELTEZ MECÁNICA ( $\lambda_m$  o  $\lambda$ ):** establece la relación entre la longitud de pandeo con el radio de giro ( $i = \sqrt{I/A}$ ) de la sección en la dirección considerada.

**AXIL REDUCIDO ( $v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$ ):** proporciona un dato adimensional sobre la intensidad de este esfuerzo en una sección.

**RAZÓN DE EXCENTRICIDADES DE 1<sup>er</sup> ORDEN ( $e_1/e_2$ ):** se define como el cociente entre la excentricidad de mayor de los momentos extremos ( $M_2$ ) y el opuesto ( $M_1$ ), de forma que  $|M_2| > |M_1|$  (y por tanto  $|e_2| > |e_1|$ ). Debe tenerse en cuenta, además, el signo de éstas: adopta valor positivo en curvatura simple, y negativo para doble curvatura.

$\frac{e_1}{e_2} > 0$

$\frac{e_1}{e_2} < 0$

Además de éstas, existen otras variables a tener en cuenta, como la propia traslacionalidad o intraslacionalidad de la estructura, así como la disposición relativa de las armaduras en la sección (coeficiente C).

Fig.1: Nociones básicas en problemas de inestabilidad, según EHE-08

Las normativas de cálculo, en general (Corres y Alsaadi, 1987), utilizan uno o varios parámetros para establecer el método (simplificado o más complejo) con el que debe de abordarse un determinado problema de posible inestabilidad. En particular, la EHE-08 exige analizar previamente si la esbeltez mecánica ( $\lambda_m$ ) asociada al elemento a comprobar queda por encima o por debajo de una determinada esbeltez límite ( $\lambda_{lim}$ ), como criterio para discernir la necesidad de realizar la comprobación a pandeo, fig. 2.

La expresión indicada en la norma española requiere, por tanto, realizar una serie de cálculos intermedios para conocer si debemos o no realizar la mencionada comprobación. Con objeto de simplificar la labor del proyectista de estructuras, simplificando estos pasos intermedios para la

obtención de la esbeltez límite, en el presente artículo se presenta de manera justificada, una serie de herramientas de tipo gráfico (ábacos) que permiten:

- discriminar la posibilidad de despreciar los efectos de segundo orden en una determinada estructura;
- ajustar las dimensiones de la sección para conseguirlo; o bien
- comprobar si, en un soporte armado, se cumplen las condiciones necesarias de esbeltez máxima.

Y todo ello, eliminando cualquier tipo de operación intermedia, simplemente apoyándose en las propias variables definidas de forma estricta en la Instrucción y a través de unos sencillos juegos de diagramas.

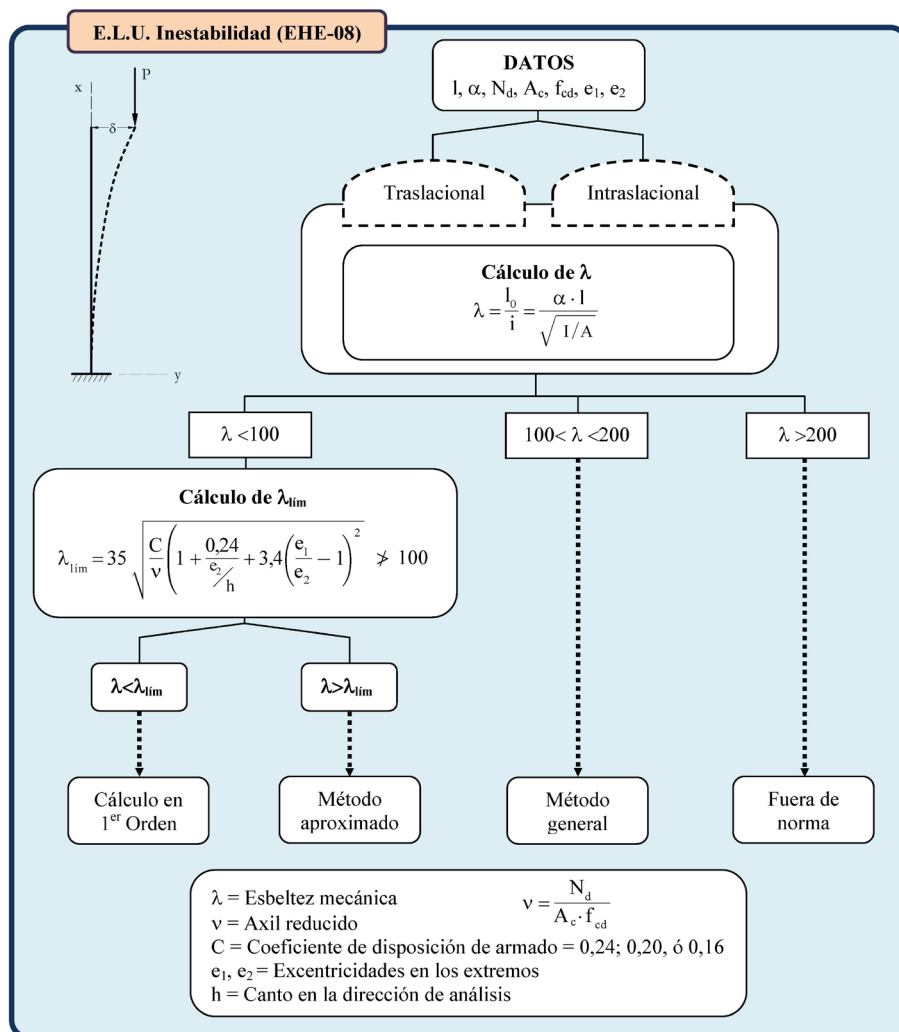


Fig. 2: Síntesis del procedimiento en E.L.U. de Inestabilidad, según EHE-08

## 2. LOS LÍMITES DE ESBELTEZ EN LAS NORMATIVAS DE HORMIGÓN ARMADO

Tal como se ha apuntado anteriormente, las diferentes normativas internacionales de hormigón introducen sus propios criterios para establecer el ámbito de aplicación de los métodos de cálculo (de menor a mayor complejidad). Una constante en todas ellas es el uso del concepto de esbeltez (inicialmente la geométrica, y actualmente la mecánica) como variable más adecuada para conocer la influencia de los posibles efectos de segundo orden en una determinada estructura.

En general, se establece una pareja de valores límite de esbeltez (comúnmente denominados inferior y superior respectivamente). Para el caso del límite inferior ( $\lambda_{lim}$ ), si bien las normas antiguas (Gutiérrez, Jiménez, Recuero, Río y del Río, 1988) (Corres, Alsaadi y León, 1986) adoptaban un valor fijo buscando la simplicidad de aplicación (EH-82, EH-91, EHE-98, MC-78, BS-8110-97), los códigos e instrucciones modernos los hacen depender de otros parámetros que permiten ajustarlo a la particularidad de cada problema (Río y Morán, 1986) (Cortés, Bonet y Romero, 2011): axil reducido, excentricidad relativa, relación entre momentos extremos...

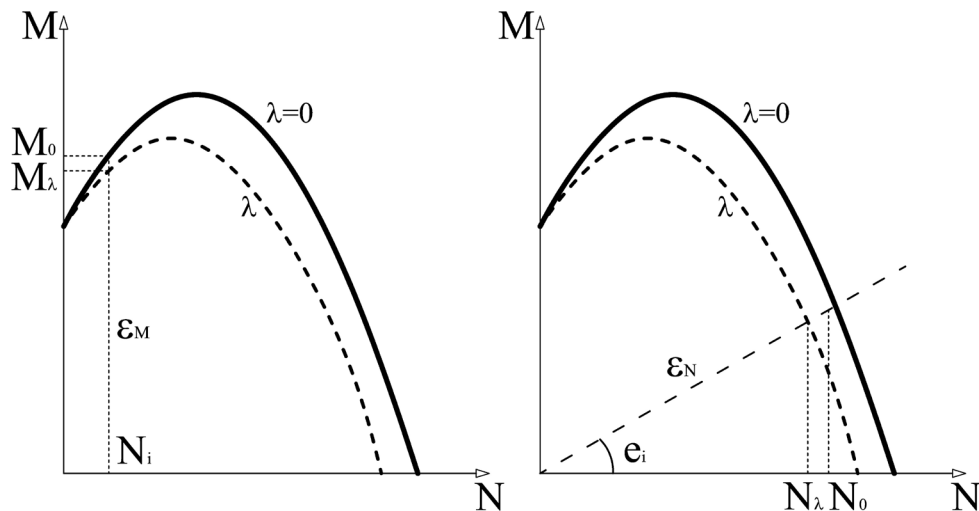


Fig. 3: Criterios generales de evaluación de pérdida de capacidad portante

Las diferentes formulaciones normativas relacionan estos parámetros con el criterio, internacionalmente consensuado (Marí y Hellesland, 2005), de acotar la pérdida de capacidad resistente, fig. 3, definiéndola bien sea en función de un valor de axil constante, o bien haciendo invariable la excentricidad (Río y Morán, 1986) (Bonet, Goberna, Fernández y Miguel, 2001). En la Tabla 1 se recogen las expresiones y criterios utilizados en la norma española, americana, el eurocódigo y el código modelo.

NORMA	VARIABLES	CRITERIO	EXPRESIÓN $\lambda_{lim}$	
EHE-08 (CPH, 2009)	$\frac{e_1/e_2}{C}$ $\frac{e_2/h}{v}$	$\epsilon_M \leq 0,1$	$\lambda_{lim} = 35 \sqrt{\frac{C}{v} \left( 1 + \frac{0,24}{\frac{e_2}{h}} + 3,4 \left( \frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right)} \not\geq 100$	
ACI-318-11 (ACI, 2011)	$M_1/M_2$	$\epsilon_N \leq 0,05$	INTRASLACIONAL	$\lambda_{lim} = 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} < 40$
			TRASLACIONAL	$\lambda_{lim} = 22$
EC-2 (CEN, 2010)	$\frac{\varphi_{ef}}{\omega}$ $\frac{M_1/M_2}{v}$	$\epsilon_M \leq 0,1$	$\lambda_{lim} = 20 \frac{\sqrt{1+2 \cdot \omega}}{1+0,2 \cdot \varphi_{ef}} \cdot \frac{1,7 - M_1/M_2}{\sqrt{v}}$	

NORMA	VARIABLES	CRITERIO	EXPRESIÓN $\lambda_{lim}$	
MC CEB-FIB 90 (CEB, 1993)	$\frac{e_1/e_2}{v}$	$\varepsilon_M \leq 0,1$	INTRASLACIONAL	$\lambda_{lim} = 7,5 \cdot \frac{2 - \frac{e_1}{e_2}}{v} \text{ si } v \leq 0,39$ $\lambda_{lim} = 12 \cdot \left(2 - \frac{e_1}{e_2}\right) \text{ si } v > 0,39$
			TRASLACIONAL	$\lambda_{lim} = \frac{7,5}{v} \text{ si } v \leq 0,39$ $\lambda_{lim} = 12 \text{ si } v > 0,39$
<p>Donde:</p> <p><math>\varepsilon_M</math> = Error por pérdida de capacidad resistente para axil constante <math>\varepsilon_M = \frac{M_0 - M_\lambda}{M_\lambda}</math></p> <p><math>\varepsilon_N</math> = Error por pérdida de capacidad resistente para excentricidad constante <math>\varepsilon_N = \frac{N_0 - N_\lambda}{N_\lambda}</math></p> <p><math>e_1/e_2</math> = Relación de excentricidades de primer orden (<math> e_1  &lt;  e_2 </math>)</p> <p><math>e_2/h</math> = Excentricidad relativa al canto (h) de la pieza</p> <p>C = Coeficiente según la disposición de armaduras (C= 0,24; 0,20 ; ó 0,16)</p> <p>v = Axil reducido</p> <p><math>M_1/M_2</math> = Razón de momentos de primer orden</p> <p><math>\varphi_{ef}</math> = Coeficiente de fluencia</p> <p><math>\omega</math> = Cuantía mecánica de armado (<math>A_s \cdot f_{yd} / A_c \cdot f_{cd}</math>)</p>				

Tabla 1: Límite inferior de esbeltez según normativa internacional

En lo relativo a la Instrucción Española, ha sufrido un notable cambio respecto a la versión de 1998, en la cual el límite de esbeltez adoptaba en todo caso el valor constante de 35. La introducción de la nueva formulación permite evitar ciertas singularidades que proporcionaban resultados del lado de la inseguridad (Morán, 1992) (Maristany, 1997), pero exige a cambio un esfuerzo al proyectista mediante una serie de cálculos intermedios para justificar el método a utilizar.

### 3.- DISCUSIÓN DE LOS VALORES LÍMITE ASOCIADOS A $\lambda_{lim}$ EN EHE-08

#### 3.1.- INTRODUCCIÓN

Conocida la expresión promulgada en el apartado 43.1.2 de la Instrucción (tal como se indica en la Tabla 1), pueden establecerse las siguientes consideraciones a efectos de simplificación para su estudio parametrizado:

$$\lambda_{inf} = 35 \sqrt{\frac{C}{v} \left[ 1 + \frac{0,24}{e_2/h} + 3,4 \left( \frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]} \not\geq 100 \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A} = \frac{C}{v} \\ \tilde{B} = \frac{0,24}{e_2/h} \\ \tilde{C} = 3,4 \left( \frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \\ \tilde{D} = 1 + \tilde{B} + \tilde{C} \\ \tilde{E} = \tilde{A} \cdot \tilde{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{\text{inf}} = 35 \sqrt{\tilde{A} [1 + \tilde{B} + \tilde{C}]} = 35 \sqrt{\tilde{A} [1 + \tilde{B} + \tilde{C}]} = 35 \sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{D}} = 35 \sqrt{\tilde{E}} \not\geq 100 \quad (\text{Ec. 2})$$

Para el caso más sencillo de cálculo, el traslacional (donde  $e_1/e_2=1 \Rightarrow \tilde{C}=0$ ), resulta interesante discutir los dominios de definición de la ecuación en función de los diferentes parámetros, con objeto de acotar sus valores límite. En este caso, la ecuación (Ec. 2) se simplifica de la siguiente manera:

$$\lambda_{\text{inf}} = 35 \sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{D}} = 35 \sqrt{\frac{0,24}{v} \left[ 1 + \frac{\tilde{B}}{e_2/h} \right]} = 35 \sqrt{\tilde{A} [1 + \tilde{B}]} \not\geq 100 \quad (\text{Ec. 3})$$

Para los objetivos del artículo, se analiza únicamente el caso de armadura simétrica a dos caras en el plano de pandeo ( $C=0,24$ ), pudiéndose establecerse el mismo procedimiento para el resto de casos.

### 3.2.- VALORES POSIBLES DE $e_2/h$

En el Artículo 42.2.1 de la EHE se incide en la necesidad de adoptar una excentricidad mínima, que habrá de cumplir el valor de  $e_2$ :

$$e_2 > e_{\text{min}} = \begin{cases} \frac{h}{20} \Rightarrow \frac{e_2}{h} = \frac{h/20}{h} = \frac{1}{20} = 0,05 \Rightarrow \tilde{B} = 4,8 \\ 20 \text{ mm} \Rightarrow \frac{e_2}{h} = \frac{20}{h} \Rightarrow \frac{e_2}{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{B} \rightarrow \infty \\ 0,05 & \text{si } h = 400 \text{ mm} \Rightarrow \tilde{B} = 4,8 \\ 1 & \text{si } h = 20 \text{ mm} \Rightarrow \tilde{B} = 0,24 \\ \infty & \text{si } h \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{B} \rightarrow 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{Ec. 4})$$

De lo anterior puede deducirse que, para cumplir las dos limitaciones normativas de forma simultánea, existe una cota superior de  $\tilde{B} = 4,8$ . Entonces si  $\tilde{B} \leq 4,8 \Rightarrow \tilde{D} \leq 5,8$ : es decir, que también existe una cota superior de  $\tilde{D}$ . Además se puede deducir que cuando  $\tilde{B}$  disminuye indefinidamente (esto es,  $e_2/h \rightarrow \infty$ ), el valor de  $\tilde{D}$  tiende a la unidad de manera asintótica. Luego  $\tilde{D}$  es una función que depende de  $e_2/h$ , acotada en el intervalo  $[1;5,8]$ .

### 3.3.- VALORES POSIBLES DE $v$

Atendiendo a la propia definición del axil reducido, y para una determinada sección de hormigón armado, puede señalarse que:

$$v = \begin{cases} 2 & \text{si } N_d = N_{d \text{ máx}} \\ 1 & \text{si } N_d = A_c \cdot f_{cd} \\ 0 & \text{si } N_d \rightarrow 0 \Rightarrow N_d \ll A_c \cdot f_{cd} \end{cases} \quad (\text{Ec. 5})$$

Según estos valores, pueden establecerse los posibles valores de  $\tilde{A} = 0,24/v$ :

$$\tilde{A} = \begin{cases} 0,12 & \text{si } N_d = N_{d \text{ máx}} \Rightarrow v = 2 \\ 0,24 & \text{si } v = 1 \\ 1 & \text{si } v = 0,24 \\ \infty & \text{si } N_d \rightarrow 0 \Rightarrow N_d \ll A_c \cdot f_{cd} \end{cases} \quad (\text{Ec. 6})$$

Por lo que se observa que  $\tilde{A}$  es una función acotada en el intervalo  $[0,12;\infty)$ .

### 3.4.- COMBINACIÓN DE ANÁLISIS PARA EL CÁLCULO DE $\lambda_{\text{lim}}$

Si tenemos en cuenta lo descrito en los dos epígrafes anteriores,  $\tilde{E} = \tilde{A} \cdot \tilde{D}$  no puede crecer indefinidamente ni adoptar un valor nulo, ya que  $\tilde{A} \in [0,12;\infty)$  y  $\tilde{D} \in [1;5,8]$ . La función  $\tilde{E}$  podrá, por tanto adoptar cualquier valor incluido en el intervalo  $(0;\infty)$ :

- Con  $\tilde{D}=5,8$  y  $\tilde{A}=0,12$  ( $v=2$ )  $\Rightarrow \tilde{E}=0,834$ .
- Tomando como constante el valor de  $\tilde{A}=0,12$  y variando  $\tilde{D}$  en su dominio de definición,  $\tilde{E}$  adoptará diferentes valores hasta el límite correspondiente con  $\tilde{D}=1$ . En este caso,  $\tilde{E}$  valdrá 0,346.
- Tomando como constante el valor de  $\tilde{D}=5,8$  y comprobando las posibilidades de  $\tilde{A}>0,12$  ( $v<2$ ), se deduce directamente que  $\tilde{E} \geq 0,834$  de forma particular.
- Igualmente, tomando como constante el valor de  $\tilde{D}=1$ , puede deducirse que  $\tilde{E} \geq 0,346$ .
- Finalmente, existe un valor límite superior de esbeltez (apartado 43.2.1.2 EHE-08), de valor constante  $\lambda_{\text{lim}} = 100$ . En este extremo,  $\tilde{E} = (\lambda_{\text{lim}}/35)^2 = (100/35)^2 = 8,1632$ . Entonces  $\tilde{E} = \tilde{A} \cdot \tilde{D} = 8,1632$ , luego con  $\lambda = 100$ , fig 4:

- Para  $\tilde{D}=5,8 \Rightarrow \tilde{A}=1,40 \Rightarrow v=0,24/1,4=0,17$
- Para  $\tilde{D}=68,03 \Rightarrow \tilde{A}=0,12 \Rightarrow v=2$
- Para  $\tilde{D}=1 \Rightarrow \tilde{A}=8,1632 \Rightarrow v=0,24/8,16=0,029$

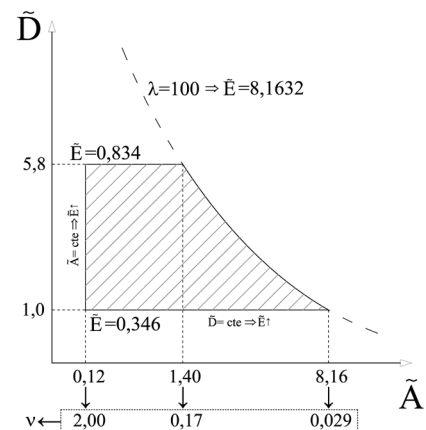


Fig. 4: Valores límite de los parámetros (C=0,24)

### 3.5.- VALORES LÍMITE PARA OTRAS DISPOSICIONES DE ARMADO

Tal como ya se ha señalado, con la misma operativa descrita en los apartados 3.1 a 3.4, pueden deducirse los dominios de definición de cada uno de los parámetros  $\tilde{A}$  y  $\tilde{D}$  para los tres casos de disposición de armado indicados en la normativa, obteniéndose los siguientes resultados enumerados en la Tabla 2.

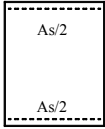
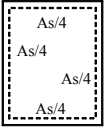
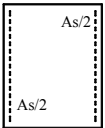
DISPOSICIÓN DE ARMADO	C	$\tilde{A}$	$\tilde{D}$
Armadura simétrica a dos caras en el plano de flexión 	0,24	$[0,12;\infty)$	$[1;5,8]$
Armadura a cuatro caras 	0,20	$[0,10;\infty)$	$[1;19,4]$
Armadura simétrica a dos caras en los laterales 	0,16	$[0,08;\infty)$	$[1;19,4]$

Tabla 2: Valores límite de los parámetros analizados en estructuras traslacionales

#### 4.- HERRAMIENTA DE APOYO AL CÁLCULO: DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

Establecidos los límites del problema, se proponen a continuación una serie de gráficas de doble entrada (Axil reducido- Excentricidad relativa), que permiten cuantificar de forma directa el límite de esbeltez adoptado en la EHE-08, para los tres casos de disposición de armado indicados anteriormente. Se disponen en este trabajo tres diagramas de interacción correspondientes a los casos traslacionales. No obstante, se pueden consultar “en línea” un completo juego de diagramas que establecen varias posibilidades de elementos de tipo intraslacional (consultar apartado de ejemplos). En todos ellos se ha adoptado como criterio de partida para el Axil reducido un incremento de valor 0,1 hasta el valor habitualmente adoptado por la bibliografía en este tipo de herramientas ( $v=1,8$ ). No obstante, de su estudio particular se observa una clara tendencia asintótica a partir de ciertos valores de  $v$ , por lo cual se han escogido en cada caso los valores más significativos y útiles, tal como se comprueba en las fig. 5, 6 y 7.

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN ADIMENSIONAL: ESBELTEZ LÍMITE INFERIOR,  $\lambda_{inf}$ .  
**ESTRUCTURA TRASLACIONAL Y ARMADURA SIMÉTRICA EN**  
**DOS CARAS OPUESTAS EN EL PLANO DE FLEXIÓN.**

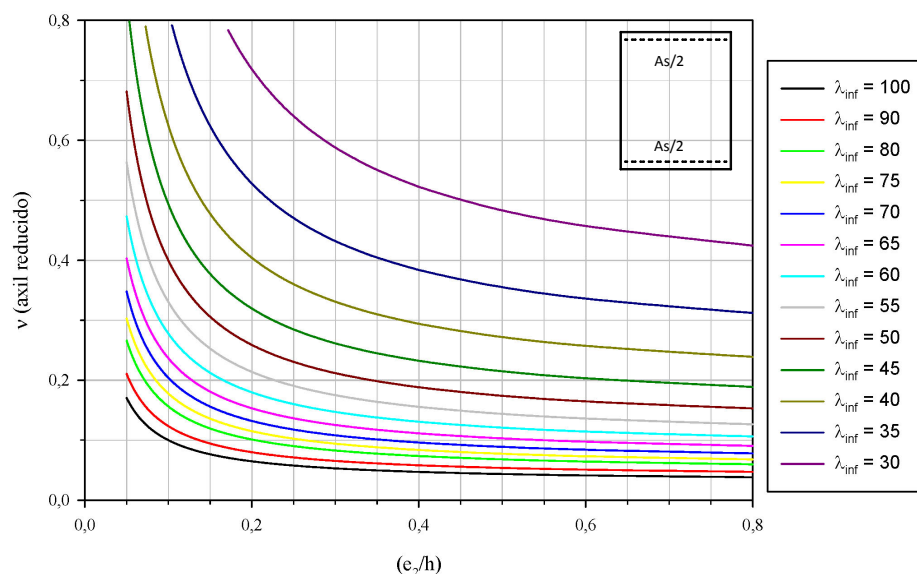


Fig. 5: Diagrama de interacción, caso traslacional,  $C=0,24$ .



DIAGRAMA DE INTERACCIÓN ADIMENSIONAL: ESBELTEZ LÍMITE INFERIOR,  $\lambda_{inf}$ .  
**ESTRUCTURA TRASLACIONAL Y ARMADURA IGUAL EN LAS CUATRO CARAS.**

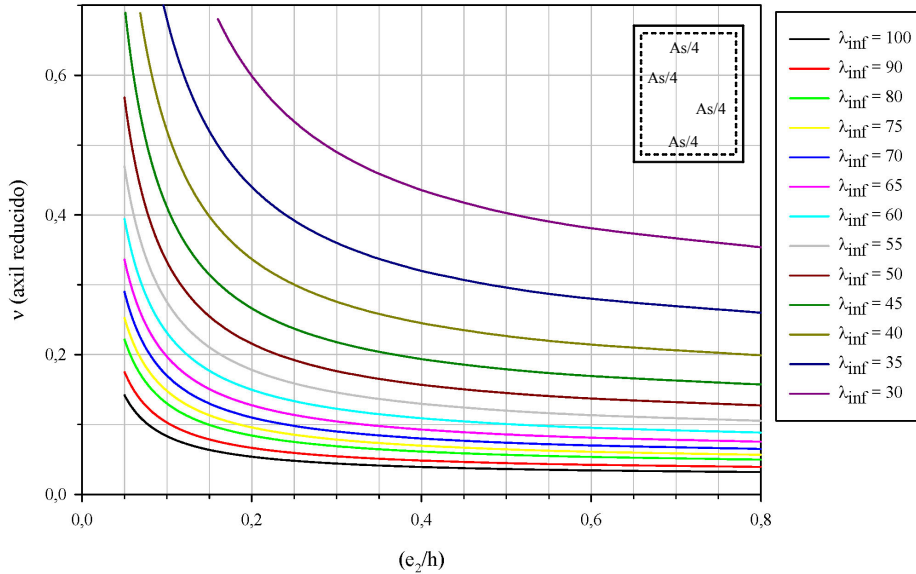


Fig. 6: Diagrama de interacción, caso traslacional,  $C=0,20$ .

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN ADIMENSIONAL: ESBELTEZ LÍMITE INFERIOR,  $\lambda_{inf}$ .  
**ESTRUCTURA TRASLACIONAL Y ARMADURA SIMÉTRICA EN LAS CARAS LATERALES.**

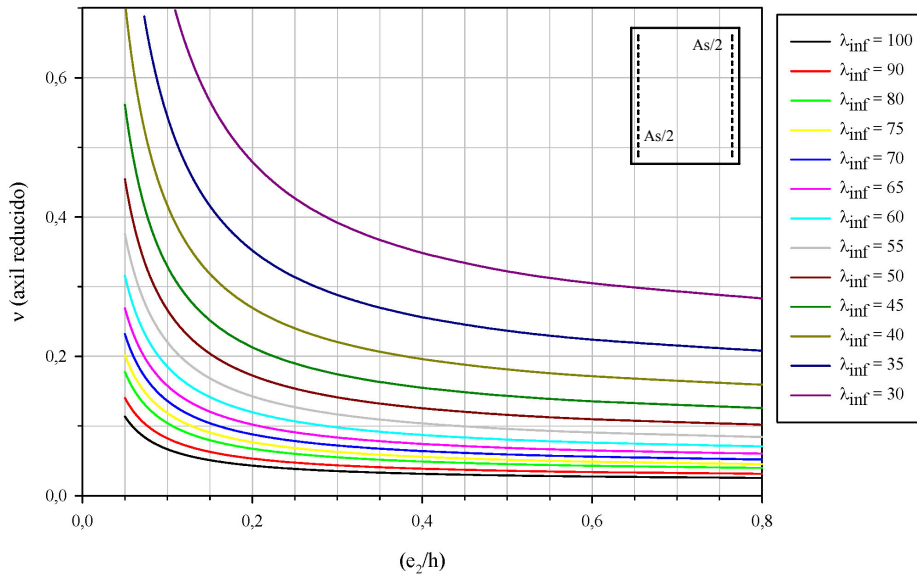


Fig. 7: Diagrama de interacción, caso traslacional,  $C=0,16$ .

De igual manera, y con objeto de completar el trabajo y ofrecer al proyectista una nueva aplicación práctica, se ha tenido en cuenta también el comentario de la Comisión Permanente del Hormigón al artículo 43.1.2. En éste, se incluye la expresión (Ec. 7) que ajusta el valor de  $\lambda_{lim}$  cuando se conoce la cuantía de armado de la sección (es decir, para el caso de elementos completamente dimensionados, en los que se pretende conocer la necesidad de tener en cuenta los efectos de segundo orden en una situación específica). Para ello hace intervenir dos nuevos coeficientes A y B:

$$\lambda_{inf} = 35 \sqrt{\frac{A \cdot \omega + 0,12}{v} \left[ 1 + \frac{B}{e_2/h} + 3,4 \left( \frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]} \not\geq 100 \quad (\text{Ec. 7})$$

Donde  $\omega$  es la cuantía mecánica total de armado del soporte;  $e_1$  y  $e_2$  son las excentricidades de primer orden;  $h$  el canto en la dirección de pandeo (tal como se recoge en la Tabla 1); y los coeficientes A y B dependen de la forma de repartir la cuantía  $\omega$ , según se exponen en la Tabla 3.

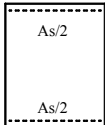
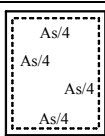
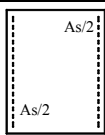
DISPOSICIÓN DE ARMADO	A	B
Armadura simétrica a dos caras en el plano de flexión <div style="text-align: center;">  </div>	0,40	$\frac{0,40\omega + 0,12}{\omega + 0,56}$
Armadura a cuatro caras <div style="text-align: center;">  </div>	0,27	$\frac{0,27\omega + 0,12}{0,93\omega + 0,56}$
Armadura simétrica a dos caras en los laterales <div style="text-align: center;">  </div>	0,14	$\frac{0,14\omega + 0,12}{0,85\omega + 0,56}$

Tabla 3: Valores de las constantes A y B

Se propone, finalmente, una solución “en línea” para poder realizar esta comprobación de forma directa, a través de las variables de entrada propias de la fórmula (Ec. 7), y para las diferentes posiciones de armado consideradas. Puede consultarse el siguiente enlace para realizar este tipo de verificación: <http://www.ubu.es/es/depingciv/areas/area-mecanica-medios-continuos-teoria-estructuras/investigacion/esbeltez>.

## 5. EJEMPLO DE APLICACIÓN PRÁCTICA

### 5.1. ESTIMACIÓN RÁPIDA DE $\lambda_{lim}$

Se propone como caso de aplicación un pilar en una estructura traslacional, de manera que pueden aprovecharse los datos aportados en los diagramas del epígrafe 4. Considérese que se ha calculado el factor de longitud de pandeo,  $\alpha=1,2$ , y que la longitud de la columna es de 3 m.

Los esfuerzos de cálculo son un axil  $N_d=200$  kN y unos flectores extremos  $M_{d2}=30$  kN·m y  $M_{d1}=20$  kN·m, que se traducen en una excentricidad máxima de primer orden  $e_2=0,15$  (debe de tenerse en cuenta que este valor cumple con la excentricidad mínima exigida por la EHE). Se propone

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN ADIMENSIONAL: ESBELTEZ LÍMITE INFERIOR,  $\lambda_{inf}$ . ESTRUCTURA TRASLACIONAL Y ARMADURA IGUAL EN LAS CUATRO CARAS.

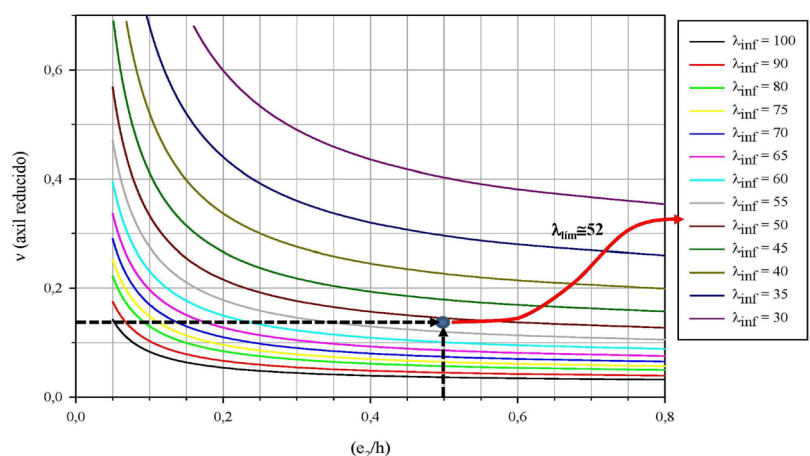


Fig. 8: Estimación de  $\lambda_{lim}$

una sección de hormigón armado cuadrada de 30 cm de lado, con la cuantía de acero repartida de forma homogénea en las cuatro caras, con un hormigón de resistencia característica  $f_{ck}=25$  MPa.

Para estos datos de partida, y utilizando un coeficiente de minoración de resistencia de 1,5 según la propia EHE, pueden aplicarse las fórmulas recogidas en la fig. 2. Se obtiene en este caso que el valor de la esbeltez asociada a la pieza es  $\lambda=41,6$ , que el axil reducido vale  $v=0,133$ , y que la excentricidad relativa vale  $e_2/h=0,5$ . Para saber si debemos de realizar la comprobación a pandeo, tenemos que calcular el valor de  $\lambda_{lim}$ . Para ello, se accede en el diagrama de interacción correspondiente a un coeficiente  $C=0,2$ , obteniendo una rápida estimación (lo suficientemente precisa) de este límite.

Como se observa en la fig. 8, puede aproximarse a un valor de  $\lambda_{lim}\cong 52$ .

Comparando el valor de nuestra esbeltez, observamos que  $\lambda=41,6 < \lambda_{lim}\cong 52$ , por lo que no es necesario realizar la comprobación de este pilar en E.L.U. de inestabilidad.

## 5.2. TANTEO DE SECCIONES PARA CUMPLIR $\lambda_{lim}$

Si para un pilar similar al anterior en el que en una primera estimación, los esfuerzos de cálculo son  $Nd=300$  kN,  $Md_2=30$  kN·m y  $Md_1=20$  kN·m, queremos conocer las dimensiones mínimas que debemos dotar a la sección para no comprobar a pandeo, podemos utilizar estos mismos diagramas de interacción para realizar tanteos de aproximación. Se propone en primer lugar una sección cuadrada de 25 cm de lado; en este caso, para las longitudes y materiales anteriormente descritos, obtenemos que:  $\lambda=49,9$ ,  $v=0,29$ , y  $e_2/h=0,4$ .

Entonces, según se expone en la fig. 9, puede aproximarse una esbeltez límite de 37. Como  $\lambda > \lambda_{lim}$ , sería necesario comprobar según el método aproximado de la instrucción. Esta comprobación puede evitarse aumentando las dimensiones de la sección, por ejemplo, en 5 cm por lado; en este caso:  $\lambda=41,6$  (igual que en el apartado 4.1),  $v=0,2$ , y  $e_2/h=0,33$ . Utilizando el diagrama adimensional puede comprobarse que, fig. 9, un valor lo suficientemente preciso del límite es  $\lambda_{lim}\cong 46$ . De esta manera, cambiando la geometría del pilar, debemos recalculer la estructura en primer orden, conocer la variación posible de los esfuerzos  $Nd$  y  $Md$ , y volver a comprobar nuevamente si estamos dentro de los valores de esbeltez permitidos.

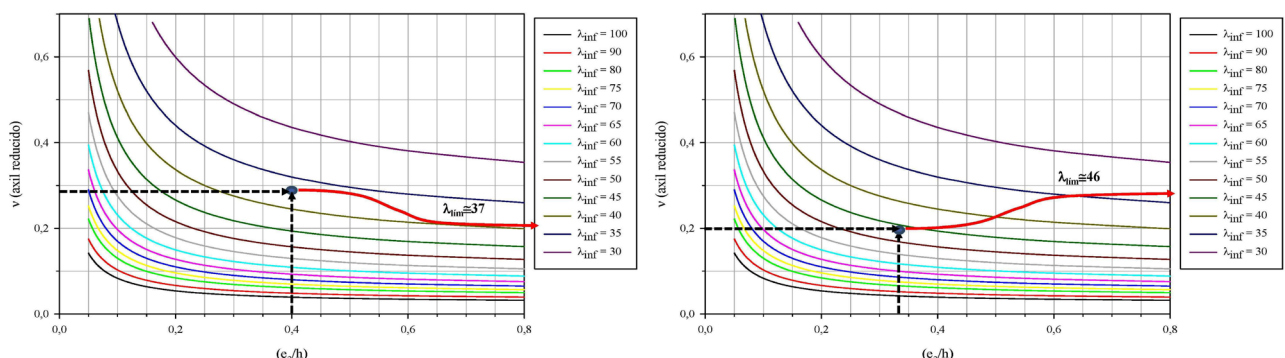


Fig. 9: Tanteos de secciones para cumplir con  $\lambda_{lim}$  (con  $C=0,20$ )

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha revisado de forma pormenorizada el nuevo criterio de esbeltez límite preconizado por la vigente Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 ( $\lambda_{lim}$ ). Se ha partido de una introducción básica al problema de inestabilidad, incluyendo la metodología generalmente señalada en las diferentes normativas internacionales, y comprobando cómo cada una de ellas utiliza diferentes expresiones para establecer los ámbitos de aplicación de los posibles métodos de

cálculo (primer orden, aproximado o segundo orden), quedando patente el consenso general de introducir la esbeltez como sistema más adecuado para ello, por su influencia y relación directa con la susceptibilidad al pandeo de un determinado elemento estructural.

Partiendo de la formulación de la norma española para  $\lambda_{lim}$ , se comprueba un salto conceptual entre la EHE-98 (en la que este límite adoptaba un valor constante de 35 en todos los casos) y la nueva versión de la Instrucción. Estos cambios en el articulado suponen al proyectista de estructuras de hormigón la ejecución de una serie de cálculos intermedios para discernir la necesidad de realizar la comprobación en E.L.U. de inestabilidad, complicando el antiguo procedimiento. El objetivo básico de este artículo era ofrecer al técnico una herramienta rápida que evitara la ejecución de estos pasos previos, proponiendo un sistema directo para conocer el valor de  $\lambda_{lim}$  a partir de las variables básicas involucradas en la expresión.

Se ha realizado de forma previa un estudio paramétrico de la ecuación, en aras de obtener los diferentes límites que pueden definirse en función de las variables de entrada (axil reducido, excentricidades, forma y dimensiones de la sección, y disposición relativa de las armaduras). De esta manera se ha conseguido encontrar diferentes dominios de definición para cada uno de ellos, permitiendo posteriormente plasmar de forma gráfica los resultados en forma de ábacos adimensionales. El trabajo se ha realizado tanto para estructuras de tipo traslacional (de formulación más sencilla) como para las de tipo intraslacional (en el que entran en juego todas las variables posibles).

En definitiva, se proponen tres de diagramas de interacción adimensionales, Axil reducido-Excentricidad relativa, para cualquier tipo de elemento traslacional (uno para cada posible disposición de armaduras habituales). El juego de diagramas incorporado al artículo permite ilustrar de forma sintética las posibilidades de estas herramientas (simplemente aprovechando sencillez de la herramienta gráfica que se propone, e incluyendo ejemplos de aplicación) No obstante se ha realizado un juego completo de este tipo de diagramas para el caso intraslacional, variando la razón  $e_1/e_2$  entre sus límites en incrementos de valor 0,1. La disponibilidad de este material se realiza de forma libre desde la red, a través de enlace: <http://www.ubu.es/es/depingciv/areas/area-mecanica-medios-continuos-teoria-estructuras/investigacion/esbeltez>.

Por otra parte, la Comisión Permanente del Hormigón propone en sus comentarios un método para realizar la comprobación de elementos ya dimensionados y completamente armados. Esta posibilidad queda plasmada mediante una nueva expresión en la que se tienen en cuenta todas las variables anteriormente descritas junto a la propia cuantía de armado. Se ha completado el trabajo incluyendo un nuevo enlace de acceso “en línea”, facilitando la realización de este tipo de comprobaciones sin necesidad de realizar los cálculos señalados en la norma (en la misma dirección antes indicada).

## 7. REFERENCIAS

- ACI - American Concrete Institute (2011). *Building code requirements for reinforced concrete. ACI 318-11*. Farmington Hills (Michigan, EEUU): ACI Committee 318.
- Bonet Senach, J.L., Goberna Pérez, E., Fernández Prada, M.A., y Miguel Sosa, P.F. (2001). Esbeltez límite inferior en soportes de hormigón armado. *Hormigón y Acero*, 219, p. 79-89.
- CEB - Comité Euro-International du Béton (1993). *CEB-FIP Model Code 1990 – Design Code. 2ª edición*. Londres (Reino Unido): Thomas Telford Services Ltd.
- CEN - European Committee for Standardization (2010). *Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y Reglas para edificación. EN 1992-1-1:2010*. Madrid: AENOR.

- Corres Peiretti ,H., Alsaadi Altayeb, B. y León González F.J. (1986). Límites de esbeltez de soportes esbeltos de hormigón armado. *Hormigón y Acero*, 161, p. 35-52.
- Corres Peiretti, H. y Alsaadi Altayeb, B. (1987). Estado límite último de soportes de hormigón armado. Propuesta general de comprobación. *Hormigón y Acero*, 163, p. 9-21.
- Cortés Moreno, E., Bonet Senach, J.L., Romero García, M.L., y Miguel Sosa, P.F. (2011). Slenderness limit of the weak axis in the design of rectangular reinforced concrete non-sway columns. *Engineering Structures*, 33, p. 1157–1165. doi: 10.1016/j.engstruct.2010.12.034
- CPH - Comisión Permanente del Hormigón (2009). *Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08. 3ª edición*. Madrid: Ministerio de Fomento. Centro de Publicaciones.
- Gutiérrez Jiménez, J.P., Recuero Forniés, R., Río Suárez O.I., y del Río Bueno, A. (1988). Estado actual del cálculo de soportes y pórticos de hormigón armado. *Hormigón y Acero*, 168, p. 43-51.
- Marí Bernat, A.R., Helleland, J. (2005). Lower Slenderness Limits for Rectangular Reinforced Concrete Columns. *Journal of Structural Engineering*, 131(1), p. 85-95. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:1(85)
- Maristany Carreras, J. (1997). *Pandeo de estructuras de hormigón armado*. 2ª edición. Barcelona: Edicions UPC.
- Morán-Cabré, F. (1992). Estados límites últimos (flexión/compresión y pandeo). *Hormigón y Acero*. 182, p. 47-52.
- Río Suárez, O.I., Morán Cabré, F. (1986). Límites de esbeltez para soportes de hormigón armado: 1.- Límite de esbeltez inferior. *Hormigón y Acero*, 160, p. 31-38.